BAB III

Bilangan Kabur dan Operasi-Operasi Aritmetikanya

3.1 Bilangan Kabur

Di antara berbagai jenis himpunan kabur, maka himpunan kabur yang didefinisikan pada himpunan bilangan rill $\mathbb{R}$ mempunyai arti yang khusus. Himpunan kabur yang demikian mempunyai makna kuantitatif dan disebut sebagai bilangan kabur. Bilangan kabur merupakan suatu bilangan yang tidak persis (*imprecise*) dalam garis rill $\mathbb{R}$, misalnya "kira-kira 10", "mendekati 5", "sekitar 20", dan sebagainya.

Suatu bilangan kabur dapat dipandang sebagai suatu perluasan dari interval kepercayaan. Akan tetapi, bilangan kabur bukanlah suatu variabel acak. Variabel acak merupakan suatu data objektif yang diperoleh dari hasil pengamatan sedangkan bilangan kabur merupakan suatu data subjektif yang diperoleh dari hasil penilaian.

Agar bilangan kabur yang merupakan suatu himpunan kabur tersebut dapat dilakukan operasi-operasi aritmetika kepadanya, maka dilakukan beberapa pembatasan-pembatasan pada himpunan kabur tersebut, sehingga bilangan kabur didefinisikan secara formal sebagai berikut:

Definisi 3.1

Misalkan $\tilde{A}$ adalah suatu himpunan kabur yang didefinisikan pada bilangan rill $\mathbb{R}$. Maka $\tilde{A}$ adalah suatu bilangan kabur jika memenuhi sekurang-kurangnya tiga sifat berikut:

(i). $\tilde{A}$ adalah himpunan kabur normal (ii). $\tilde{A}$ adalah himpunan kabur konveks

(iii). A_α merupakan suatu interval tertutup $\forall\alpha\in[0, 1]$

Fungsi keanggotaan segitiga dan trapezium sering digunakan sebagai fungsi keanggotaan bilangan kabur. Akan tetapi, bentuk-bentuk fungsi keanggotaan yang lain dapat juga digunakan sebagai fungsi keanggotaan bilangan kabur.

Contoh 3.1

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan kabur "bilangan-bilangan rill yang dekat ke 6" dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & ; \ 0 < x \leq 6 \\ \frac{12-x}{6} & ; \ 6 < x < 12 \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}, \quad x\in\mathbb{R},$$

Dengan mudah dapat diperlihatkan bahwa syarat-syarat untuk suatu bilangan kabur dipenuhi oleh himpunan kabur $\tilde{A}$, sehingga "bilangan-bilangan rill yang dekat ke 6" adalah suatu bilangan kabur dalam $\mathbb{R}$.

Contoh 3.2

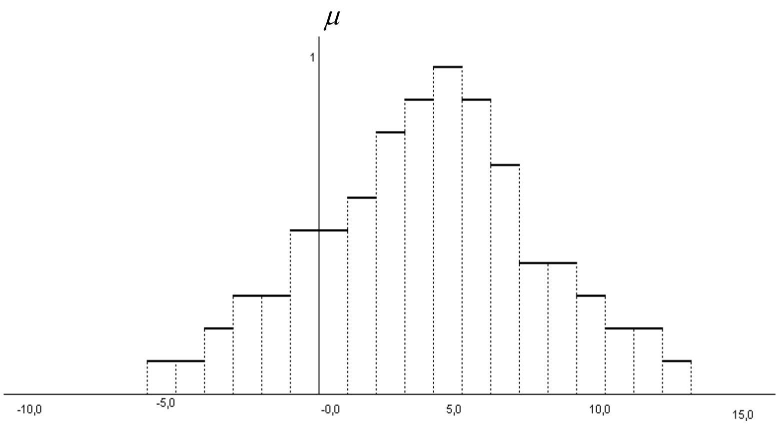
Misalkan $\tilde{B}$ = bilangan-bilangan bulat sekitar 4, adalah suatu himpunan kabur yang didefinisikan pada bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu:

$$\tilde{B} = \{(-6, 0.1), (-5, 0.1), (-4, 0.2), (-3, 0.3), (-2, 0.3), (-1, 0.5), (0, 0.5), (1, 0.6), (2, 0.8), (3, 0.9), (4, 1), (5, 0.9), (6, 0.7), (7, 0.4), (8, 0.4), (9, 0.3), (10, 0.2), (11, 0.2), (12, 0.1)\}.$$

Himpunan kabur $\tilde{B}$ tersebut merupakan suatu bilangan kabur "bilangan-bilangan bulat sekitar 4".

Suatu bilangan kabur dalam $\mathbb{Z}$ dapat ditransformasi ke suatu bilangan kabur dalam $\mathbb{R}$, yaitu dengan meningkatkan pendiskritan (*descretezation*) sehingga fungsi keanggotaannya menjadi kontinu sesepenggal (*piecewise continuous*) dan semua potongan-α nya merupakan interval tertutup dalam $\mathbb{R}$. Sebagai contoh, pandang kembali Contoh 3.2, bilangan kabur $\tilde{B}$ dalam

$\mathbb{Z}$ dapat ditransformasi ke bilangan kabur dalam $\mathbb{R}$, sehingga fungsi keanggotaannya seperti diperlihatkan dalam Gambar 3.1



Gambar 3.1 Bilangan kabur "sekitar 4" dalam $\mathbb{Z}$

3.2 Interval dan Operasi-operasi Aritmetikanya

Suatu interval tertutup dalam $\mathbb{R}$, yaitu [*a*, *b*], adalah semua bilangan rill yang lebih besar atau sama dengan *a* dan lebih kecil atau sama dengan *b*, yang dinyatakan sebagai:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Bilangan *c* dapat dipandang sebagai interval tertutup dalam $\mathbb{R}$, yaitu [*c*, *c*]. Sebagai contoh, bilangan 5 adalah interval tertutup pada $\mathbb{R}$, yaitu 5 = [5, 5]. Suatu interval tertutup [*a*, *b*] pada $\mathbb{Z}$ (himpunan bilangan bulat), didefinisikan sebagai

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{Z} \mid a \leq x \leq b\}$$

Sebagai contoh, $\boldsymbol{A}$ = [-3, 2] adalah interval tertutup dalam $\mathbb{Z}$, maka $\boldsymbol{A}$ = {-3, -2, -1, 0, 1, 2}. Demikian juga, interval tertutup [a, b] pada $\mathbb{N}$ (bilangan asli), didefinisikan sebagai

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$$

Misalkan $*$ menyatakan operasi aritmetika pada interval tertutup, yang meliputi penjumlahan (+), pengurangan (–), perkalian (·), dan pembagian (:), maka $[a, b]*[d, e] = \{ f*g \mid a \leq f \leq b,\ d \leq g \leq e\}$ merupakan sifat umum dari semua operasi aritmetika interval tertutup kecuali [a, b] : [d, e] tidak didefinisikan jika $0 \in [d, e]$.

Keempat operasi aritmetika pada interval tertutup didefinisikan sebagai berikut:

- $[a, b] + [d, e] = [a+d, b+e]$,
- $[a, b] - [d, e] = [a-e, b-d]$,
- $[a, b] \cdot [d, e] = [min(ad, ae, bd, be), max(ad, ae, bd, be)]$,
- $[a, b] : [d, e] = [a, b] \cdot [1/e, 1/d] = [min(a/e, a/d, b/c, b/d), max(a/e, a/d, b/e, b/d)]$ untuk $0 \notin [d, e]$.

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari operasi aritmetika interval tertutup pada $\mathbb{R}$:

Misalkan $\boldsymbol{A}=[a_1, a_2]$, $\boldsymbol{B}=[b_1, b_2]$, $\boldsymbol{C}=[c_1, c_2]$, 0=[0, 0], 1=[1, 1], maka

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
   $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ (kekomutatifan)
2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$
   $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$ (keassosiatifan)
3. $\boldsymbol{A} = 0 + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + 0$
   $\boldsymbol{A} = 1\cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot 1$ (identitas)
4. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \subseteq \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ (subdistributif)
   Jika $b\cdot c \geq 0 \ \forall b\in\boldsymbol{B}$ dan $c\in\boldsymbol{C}$, maka $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$
5. $0 \in \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}$ dan $1 \in \boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}$
6. Jika $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{E}$ dan $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{F}$, di mana $\boldsymbol{E}$ dan $\boldsymbol{F}$ juga adalah interval tertutup, maka
   $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}$
   $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{A \cdot B \subseteq E \cdot F}$
$\boldsymbol{A : B \subseteq E : F}$

3.3 Operasi Aritmetika Bilangan Kabur

Pada bagian ini dibahas operasi-operasi aritmetika bilangan kabur, seperti operasi penjumlahan, operasi pengurangan, operasi perkalian, dan operasi pembagian. Pengoperasian aritmetika bilangan kabur tersebut menggunakan dua metode, yaitu metode **potongan-α** dan metode **prinsip perluasan**.

3.3.1 **Metode potongan-α**

Metode ini didasarkan pada aritmetika interval dan Teorema Dekomposisi. Misalkan $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah himpunan kabur, dan misalkan $*$ adalah operasi aritmetika (+), (–), (·), dan (:). Kemudian didefinisikan suatu himpunan kabur $\tilde{I} * \tilde{J}$ pada $\mathbb{R}$ yang potongan-α nya didefinisikan sebagai $(I * J)_\alpha = I_\alpha * J_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Dengan Teorema Dekomposisi, $\tilde{I} * \tilde{J}$ dapat direpresentasikan sebagai $\tilde{I} * \tilde{J} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\tilde{I} * \tilde{J})_\alpha$. Karena $(I*J)_\alpha$ merupakan suatu interval tertutup untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ dan $\tilde{I}$, $\tilde{J}$ bilangan kabur, maka $\tilde{I} * \tilde{J}$ juga bilangan kabur.

<u>**Operasi Penjumlahan**</u>

Contoh 3.3

Misalkan bilangan kabur $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ masing-masing mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{I}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \le -5 \quad \text{atau} \quad x \ge 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{5}{3} & ; \ -5 < x < -2 \\ \frac{-x}{3} + \frac{1}{3} & ; \ -2 \le x < 1 \end{cases} \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3.1)$$

dan $\mu_{\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq -3 \text{ atau } x \geq 12 \\ \frac{x}{7} + \frac{3}{7} & ; \quad -3 < x < 4 \\ \frac{-x}{8} + \frac{12}{8} & ; \quad 4 \leq x < 12 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (3.2)

Dari (3.1), diperoleh

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{3} + \frac{5}{3} \text{ dan } \alpha = \frac{-a_2^{(\alpha)}}{3} + \frac{1}{3}$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{I}$ adalah

$$I_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, \ a_2^{(\alpha)}] = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1]$$

Dari (3.2), diperoleh

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{7} + \frac{3}{7} \text{ dan } \alpha = \frac{-b_2^{(\alpha)}}{8} + \frac{12}{8}$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{J}$ adalah

$$J_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, \ b_2^{(\alpha)}] = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$$

Dengan demikian, $I_\alpha + J_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, \ a_2^{(\alpha)}] + [b_1^{(\alpha)}, \ b_2^{(\alpha)}]$

$$= [3\alpha - 5, -3\alpha + 1] + [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$$

$$= [10\alpha - 8, -11\alpha + 13]$$

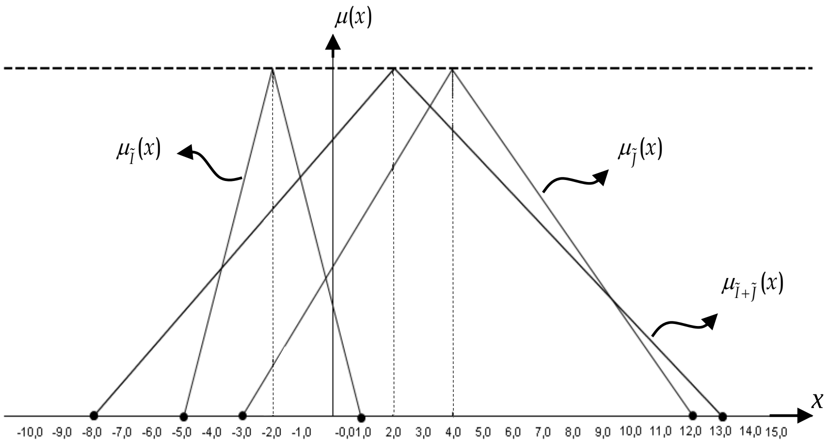
Misalkan $c_1^{(\alpha)} = 10\alpha - 8$ dan $c_2^{(\alpha)} = -11\alpha + 13$, maka

$$\alpha = \frac{c_1^{(\alpha)}}{10} + \frac{8}{10} \text{ dan } \alpha = \frac{-c_2^{(\alpha)}}{11} + \frac{13}{11}$$

sehingga diperoleh

$$\mu_{\tilde{I}+\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq -8 \text{ atau } x \geq 13 \\ \frac{x}{10} + \frac{8}{10} & ; \quad -8 < x < 2 \\ \frac{-x}{10} + \frac{13}{10} & ; \quad 2 \leq x < 13 \end{cases} , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gambar 3.2 memperlihatkan grafik fungsi keanggotaan $\tilde{I} + \tilde{J}$



Gambar 3.2 Penjumlahan dua bilangan kabur (Contoh 3.3)

Contoh 3.4

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur dalam $\mathbb{N}$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{A}$ ={(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)} dan

$\tilde{B}$ ={(1, 0.3), (2, 0.6), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.2), (6, 0.1)}

Potongan-α untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$A_{0.1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1, 6]$	$B_{0.1} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = [1, 6]$
$A_{0.2} = \{2, 3, 4, 5, 6\} = [2, 6]$	$B_{0.2} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = [1, 5]$
$A_{0.3} = \{2, 3, 4, 5, 6\} = [2, 6]$	$B_{0.3} = \{1, 2, 3, 4\} = [1, 4]$
$A_{0.4} = \{3, 4, 5\} = [3, 5]$	$B_{0.4} = \{2, 3, 4\} = [2, 4]$
$A_{0.5} = \{3, 4, 5\} = [3, 5]$	$B_{0.5} = \{2, 3, 4\} = [2, 4]$
$A_{0.6} = \{3, 4, 5\} = [3, 5]$	$B_{0.6} = \{2, 3, 4\} = [2, 4]$
$A_{0.7} = \{3, 4, 5\} = [3, 5]$	$B_{0.7} = \{3, 4\} = [3, 4]$
$A_{0.8} = \{3, 4\} = [3, 4]$	$B_{0.8} = \{3\} = [3, 3]$
$A_{0.9} = \{4\} = [4, 4]$	$B_{0.9} = \{3\} = [3, 3]$
$A_{1} = \{4\} = [4, 4]$	$B_{1} = \{3\} = [3, 3]$

Misalkan $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, maka $C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha$, sehingga diperoleh:

$C_{0.1}$ = [1, 6] + [1, 6] = [2, 12] = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
$C_{0.2}$ = [2, 6] + [1, 5] = [3, 11] = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}
$C_{0.3}$ = [2, 6] + [1, 4] = [3, 10] = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
$C_{0.4}$ = [3, 5] + [2, 4] = [5, 9] = {5, 6, 7, 8, 9}
$C_{0.5}$ = [3, 5] + [2, 4] = [5, 9] = {5, 6, 7, 8, 9}
$C_{0.6}$ = [3, 5] + [2, 4] = [5, 9] = {5, 6, 7, 8, 9}
$C_{0.7}$ = [3, 5] + [3, 4] = [6, 9] = {6, 7, 8, 9}
$C_{0.8}$ = [3, 4] + [3, 3] = [6, 7] = {6, 7}
$C_{0.9}$ = [4, 4] + [3, 3] = [7, 7] = {7}
C_1 = [4, 4] + [3, 3] = [7, 7] = {7}

Misalkan didefinisikan himpunan kabur $\tilde{C}_\alpha$ yang fungsi keanggotaannya

$$\mu_{\tilde{C}_\alpha}(x) = \alpha\mu_{C_\alpha}(x) \quad \forall x \in \mathbb{N}, \text{ maka diperoleh}$$

$\tilde{C}_{0.1}$ = {(2, 0.1), (3, 0.1), (4, 0.1), (5, 0.1), (6, 0.1), (7, 0.1), (8,0.1), (9, 0.1), (10, 0.1), (11, 0.1), (12, 0.1)}

$\tilde{C}_{0.2}$ = {(3, 0.2), (4, 0.2), (5, 0.2), (6, 0.2), (7, 0.2), (8, 0.2), (9,0.2), (10, 0.2), (11, 0.2)}

$\tilde{C}_{0.3}$ = {(3, 0.3), (4, 0.3), (5, 0.3), (6, 0.3), (7, 0.3), (8, 0.3), (9, .3),(10, 0.3)}

$\tilde{C}_{0.4}$ = {(5, 0.4), (6, 0.4), (7, 0.4), (8, 0.4), (9, 0.4)}

$\tilde{C}_{0.5}$ = {(5, 0.5), (6, 0.5), (7, 0.5), (8, 0.5), (9, 0.5)}

$\tilde{C}_{0.6}$ = {(5, 0.6), (6, 0.6), (7, 0.6), (8, 0.6), (9, 0.6)}

$\tilde{C}_{0.7}$ = {(6, 0.7), (7, 0.7), (8, 0.7), (9, 0.7)}

$\tilde{C}_{0.8}$ = {(6, 0.8), (7, 0.8), (8, 0.8), (9, 0.8)}

$\tilde{C}_{0.9}$ = {(7, 0.9)}

$\tilde{C}_1$ = {(7, 1)}

Dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, maka diperoleh

$\tilde{C} = \tilde{C}_{0.1} \cup \tilde{C}_{0.2} \cup \tilde{C}_{0.3} \cup \ldots \cup \tilde{C}_1$
= {(2, 0.1), (3, 0.3), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 0.8), (9, 0.7), (10, 0.3), (11, 0.2), (12, 0.1)}.

Operasi Pengurangan

Contoh 3.5

Misalkan bilangan kabur $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ masing-masing mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{I}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 7 \text{ atau } x \ge 19 \\ \frac{x}{7} - 1 & ; \quad 7 < x < 14 \\ \frac{-x}{5} + \frac{19}{5} & ; \quad 14 \le x < 19 \end{cases} \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3.3)$$

$$\text{dan } \mu_{\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 3 \text{ atau } x \ge 10 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & ; \quad 3 < x < 5 \\ \frac{-x}{5} + \frac{10}{5} & ; \quad 5 \le x < 10 \end{cases} \quad , \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3.4)$$

Dari (3.3), diperoleh

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{7} - 1 \text{ dan } \alpha = \frac{-a_2^{(\alpha)}}{5} + \frac{19}{5}$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{I}$ adalah

$$I_\alpha = [a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}] = [7\alpha + 7, -5\alpha + 19]$$

Dari (3.4), diperoleh

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{2} - \frac{3}{2} \text{ dan } \alpha = \frac{-b_2^{(\alpha)}}{5} + \frac{10}{5}$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{J}$ adalah

$$J_\alpha = [b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, -5\alpha + 10]$$

Dengan demikian, $I_\alpha - J_\alpha = [a_1^{(\alpha)},\ a_2^{(\alpha)}] - [b_1^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]$

$$= [7\alpha + 7, -5\alpha + 19] - [2\alpha + 3, -5\alpha + 10]$$

$$= [12\alpha - 3, -7\alpha + 16]$$

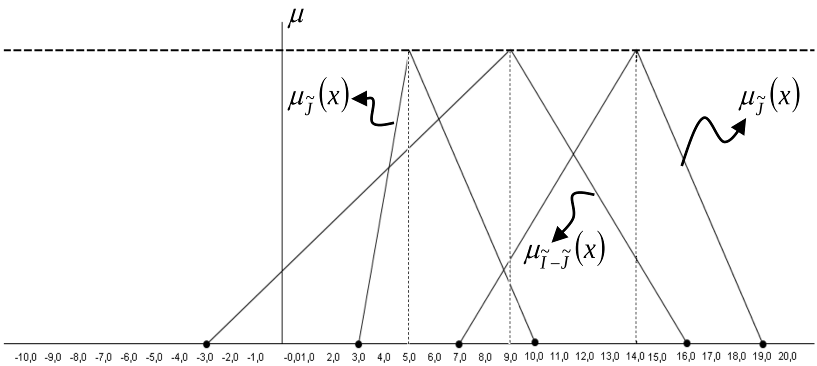
Misalkan $c_1^{(\alpha)} = 12\alpha - 3$ dan $c_2^{(\alpha)} = -7\alpha + 16$, maka

$$\alpha = \frac{c_1^{(\alpha)}}{12} + \frac{3}{12} \text{ dan } \alpha = \frac{-c_2^{(\alpha)}}{7} + \frac{16}{7}$$

sehingga diperoleh

$$\mu_{\tilde{I}+\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le -3 \quad \text{atau} \quad x \ge 16 \\ \frac{x}{12} + \frac{3}{12} & ; \quad -3 < x < 9 \\ \frac{-x}{7} + \frac{16}{7} & ; \quad 9 \le x < 16 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gambar 3.3 memperlihatkan grafik fungsi keanggotaan $\tilde{I}$ - $\tilde{J}$



Gambar 3.3 Pengurangan dua bilangan kabur (Contoh 3.5)

Contoh 3.6

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur dalam $\mathbb{Z}$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{A}$ = {(-2, 0.1), (-1, 0.3), (0, 0.7), (1, 0.9), (2, 1), (3, 0.5)} dan

$\tilde{B}$ = {(-1, 0.1), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.8), (3, 0.3)}

Potongan-α untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$A_{0.1}$ = {-2, -1, 0, 1, 2, 3} = [-2, 3] $B_{0.1}$ = {-1, 0, 1, 2, 3} = [-1, 3]
$A_{0.2}$ = {-1, 0, 1, 2, 3} = [-1, 3] $B_{0.2}$ = {0, 1, 2, 3} = [0, 3]
$A_{0.3}$ = {-1, 0, 1, 2, 3} = [-1, 3] $B_{0.3}$ = {0, 1, 2, 3} = [0, 3]
$A_{0.4}$ = {0, 1, 2, 3} = [0, 3] $B_{0.4}$ = {0, 1, 2} = [0, 2]
$A_{0.5}$ = {0, 1, 2, 3} = [0, 3] $B_{0.5}$ = {0, 1, 2} = [0, 2]
$A_{0.6}$ = {0, 1, 2} = [0, 2] $B_{0.6}$ = {0, 1, 2} = [0, 2]
$A_{0.7}$ = {0, 1, 2} = [0, 2] $B_{0.7}$ = {1, 2} = [1, 2]

$A_{0.8}$ = {1, 2} = [1, 2] $B_{0.8}$ = {1, 2} = [1, 2]
$A_{0.9}$ = {1, 2} = [1, 2] $B_{0.9}$ = {1} = [1, 1]
A_1 = {2} = [2, 2] B_1 = {1} = [1, 1]

Misalkan $\tilde{C} = \tilde{A} - \tilde{B}$, maka $C_\alpha = A_\alpha - B_\alpha$, sehingga diperoleh:

$C_{0.1}$ = [-2, 3] – [-1, 3] = [-5, 4] = {-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}
$C_{0.2}$ = [-1, 3] – [0, 3] = [-4, 3] = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}
$C_{0.3}$ = [-1, 3] – [0, 3] = [-4, 3] = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}
$C_{0.4}$ = [0, 3] – [0, 2] = [-2, 3] = {-2, -1, 0, 1, 2, 3}
$C_{0.5}$ = [0, 3] – [0, 2] = [-2, 3] = {-2, -1, 0, 1, 2, 3}
$C_{0.6}$ = [0, 2] – [0, 2] = [-2, 2] = {-2, -1, 0, 1, 2}
$C_{0.7}$ = [0, 2] – [1, 2] = [-2, 1] = {-2, -1, 0, 1}
$C_{0.8}$ = [1, 2] – [1, 2] = [-1, 1] = {-1, 0, 1}
$C_{0.9}$ = [1, 2] – [1, 1] = [0, 1] = {0, 1}
C_1 = [2, 2] – [1, 1] = [1, 1] = {1}

Misalkan didefinisikan himpunan kabur $\tilde{C}_\alpha$ yang fungsi keanggotaannya

$$\mu_{\tilde{C}_\alpha}(x) = \alpha\mu_{C_\alpha}(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}, \text{ maka diperoleh}$$

$\tilde{C}_{0.1}$ = {(-5, 0.1), (-4, 0.1), (-3, 0.1), (-2, 0.1), (-1, 0.1), (0, 0.1), (1, 0.1), (2, 0.1), (3, 0.1), (4, 0.1)}

$\tilde{C}_{0.2}$ = {(-4, 0.2), (-3, 0.2), (-2, 0.2), (-1, 0.2), (0, 0.2), (1, 0.2), (2, 0.2), (3, 0.2)}

$\tilde{C}_{0.3}$ = {(-4, 0.3), (-3, 0.3), (-2, 0.3), (-1, 0.3), (0, 0.3), (1, 0.3), (2, 0.3), (3, 0.3)}

$\tilde{C}_{0.4}$ = {(-2, 0.4), (-1, 0.4), (0, 0.4), (1, 0.4), (2, 0.4), (3, 0.4)}

$\tilde{C}_{0.5}$ = {(-2, 0.5), (-1, 0.5), (0, 0.5), (1, 0.5), (2, 0.5), (3, 0.5)}

$\tilde{C}_{0.6}$ = {(-2, 0.6), (-1, 0.6), (0, 0.6), (1, 0.6), (2, 0.6)}

$\tilde{C}_{0.7}$ = {(-2, 0.7), (-1, 0.7), (0, 0.7), (1, 0.7)}

$\tilde{C}_{0.8}$ = {(-1, 0.8), (-1, 0.8), (0, 0.8), (1, 0.8)}

$\tilde{C}_{0.9}$ = {(0, 0.9), (1, 0.9)}

$\tilde{C}_1$ = {(1, 1)}

Dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, maka diperoleh

$\tilde{C} = \tilde{C}_{0.1} \cup \tilde{C}_{0.2} \cup \tilde{C}_{0.3} \cup \ldots \cup \tilde{C}_1$ = {(-5, 0.1), (-4, 0.3), (-3, 0.3), (-2, 0.7), (-1, 0.8), (0, 0.9), (1, 1), (2, 0.6), (3, 0.5), (4, 0.1)}.

Operasi Perkalian

Contoh 3.7

Misalkan bilangan kabur $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ masing-masing mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{I}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 2 \text{ atau } x \ge 5 \\ x-2 & ; \quad 2 < x < 3 \\ \frac{-x}{2} + \frac{5}{2} & ; \quad 3 \le x < 5 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.5)$$

dan $$\mu_{\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 3 \text{ atau } x \ge 6 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & ; \quad 3 < x < 5 \\ -x+6 & ; \quad 5 \le x < 6 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.6)$$

Dari (3.5), diperoleh

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2 \text{ dan } \alpha = \frac{-a_2^{(\alpha)}}{2} + \frac{15}{2}$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{I}$ adalah

$$I_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 2, -2\alpha + 5]$$

Dari (3.6), diperoleh

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{2} - \frac{3}{2} \text{ dan } \alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{J}$ adalah

$$J_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, -\alpha + 6]$$

Dengan demikian, $I_\alpha \cdot J_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \cdot [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$

$$= [\alpha + 2, -2\alpha + 5] \cdot [2\alpha + 3, -\alpha + 6]$$

$$= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, \ 2\alpha^2 - 17\alpha + 30]$$

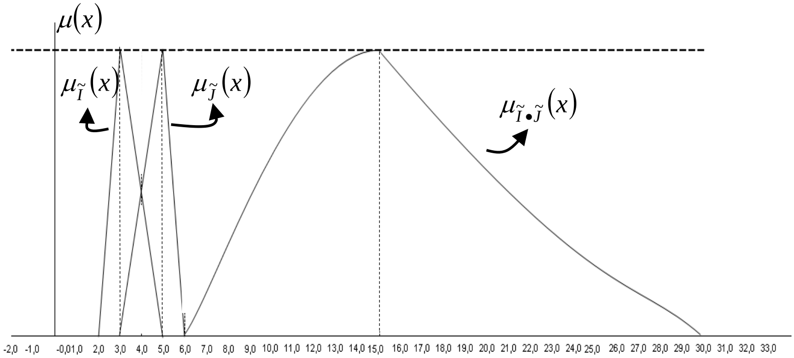
Misalkan $c_1^{(\alpha)} = 2\alpha^2 + 7\alpha + 6$ dan $c_2^{(\alpha)} = 2\alpha^2 - 17\alpha + 30$, maka

$$\alpha = \frac{-7 + \sqrt{1 + 8c_1^{(\alpha)}}}{4} \text{ dan } \alpha = \frac{17 - \sqrt{49 + 8c_2^{(\alpha)}}}{4}$$

sehingga diperoleh

$$\mu_{\tilde{I}\cdot\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 6 \text{ atau } x \ge 30 \\ \frac{-7+\sqrt{1+8x}}{4} & ; \quad 6 < x < 15 \\ \frac{17-\sqrt{49+8x}}{4} & ; \quad 15 \le x < 30 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Gambar 3.4 memperlihatkan grafik fungsi keanggotaan $\tilde{I}\,.\,\tilde{J}$



Gambar 3.4 Perkalian dua bilangan kabur (Contoh 3.7)

Contoh 3.8

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur dalam $\mathbb{N}$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{A}$ = {(3, 0.4), (4, 1), (5, 0.7)} dan $\tilde{B}$ = {(3, 0.1), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.3)}

Potongan-α untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$A_{0.1}$ = {3, 4, 5} = [3, 5]	$B_{0.1}$ = {3, 4, 5, 6} = [3, 6]
$A_{0.2}$ = {3, 4, 5} = [3, 5]	$B_{0.2}$ = {4, 5, 6} = [4, 6]
$A_{0.3}$ = {3, 4, 5} = [3, 5]	$B_{0.3}$ = {4, 5, 6} = [4, 6]
$A_{0.4}$ = {3, 4, 5} = [3, 5]	$B_{0.4}$ = {4, 5} = [4, 5]
$A_{0.5}$ = {4, 5} = [4, 5]	$B_{0.5}$ = {4, 5} = [4, 5]
$A_{0.6}$ = {4, 5} = [4, 5]	$B_{0.6}$ = {4, 5} = [4, 5]
$A_{0.7}$ = {4, 5} = [4, 5]	$B_{0.7}$ = {4, 5} = [4, 5]
$A_{0.8}$ = {4} = [4, 4]	$B_{0.8}$ = {4, 5} = [4, 5]
$A_{0.9}$ = {4} = [4, 4]	$B_{0.9}$ = {5} = [5, 5]

A_1 = {4} = [4, 4] B_1 = {5} = [5, 5]

Misalkan $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$, maka $C_\alpha = A_\alpha \cdot B_\alpha$, sehingga diperoleh:

$C_{0.1}$ = [3, 5] · [3, 6] = [9, 30] = {9, 10, …, 30}
$C_{0.2}$ = [3, 5] · [4, 6] = [12, 30] = {12, 13, …, 30}
$C_{0.3}$ = [3, 5] · [4, 6] = [12, 30] = {12, 13, …, 30}
$C_{0.4}$ = [3, 5] · [4, 6] = [12, 25] = {12, 13, …, 25}
$C_{0.5}$ = [4, 5] · [4, 5] = [16, 25] = {16, 17, …, 25}
$C_{0.6}$ = [4, 5] · [4, 5] = [16, 25] = {16, 17, …, 25}
$C_{0.7}$ = [4, 5] · [4, 5] = [16, 25] = {16, 17, …, 25}
$C_{0.8}$ = [4, 4] · [4, 5] = [16, 20] = {16, 17, 18, 19, 20}
$C_{0.9}$ = [4, 4] · [5, 5] = [20, 20] = {20}
C_1 = [4, 4] · [5, 5] = [20, 20] = {20}

Misalkan didefinisikan himpunan kabur $\tilde{C}_\alpha$ yang fungsi keanggotaannya

$$\mu_{\tilde{C}_\alpha}(x) = \alpha\mu_{C_\alpha}(x), \quad \forall x \in \mathbb{N}, \text{ maka diperoleh}$$

$\tilde{C}_{0.1}$ = {(9, 0.1), (10, 0.1), …, (30, 0.1)}

$\tilde{C}_{0.2}$ = {(12, 0.2), (13, 0.2), …, (30, 0.2)}

$\tilde{C}_{0.3}$ = {(12, 0.3), (13, 0.3), …, (30, 0.3)}

$\tilde{C}_{0.4}$ = {(12, 0.4), (13, 0.4), …, (25, 0.4)}

$\tilde{C}_{0.5}$ = {(16, 0.05), (17, 0.5), …, (25, 0.5)}

$\tilde{C}_{0.6}$ = {(16, 0.6), (17, 0.6), …, (25, 0.6)}

$\tilde{C}_{0.7}$ = {(16, 0.7), (17, 0.7), …, (25, 0.7)}

$\tilde{C}_{0.8}$ = {(16, 0.8), (17, 0.8), (18, 0.8), (19, 0.8), (20, 0.8)}

$\tilde{C}_{0.9}$ = {(20, 0.9)}

$\tilde{C}_1$ = {(20, 1)}

Dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, maka diperoleh

$\tilde{C} = \tilde{C}_{0.1} \cup \tilde{C}_{0.2} \cup \tilde{C}_{0.3} \cup \ldots \cup \tilde{C}_1$
= {(9, 0.1), (10, 0.1), (11, 0.1), (12, 0.4), (13, 0.4), (14, 0.4), (15, 0.4), (16, 0.8), (17, 0.8), (18, 0.8), (19, 0.8), (20, 1), (21, 0.7), (22, 0.7), (23, 0.7), (24, 0.7), (25, 0.7), (26, 0.3), (27, 0.3), (28, 0.3), (29, 0.3), (30, 0.3)}.

Operasi Pembagian

Contoh 3.9

Misalkan bilangan kabur $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ masing-masing mempunyai fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{I}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 18 \text{ atau } x \ge 33 \\ \frac{x}{4} - \frac{18}{4} & ; \quad 18 < x < 22 \\ \frac{-x}{11} + 3 & ; \quad 22 \le x < 33 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.7)$$

dan

$$\mu_{\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 5 \text{ atau } x \ge 8 \\ x - 5 & ; \quad 5 < x < 6 \\ \frac{-x}{2} + 4 & ; \quad 6 \le x < 8 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.8)$$

Dari (3.7), diperoleh

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)} - 18}{4} \quad \text{dan} \quad \alpha = \frac{-a_2^{(\alpha)}}{11} + 3$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{I}$ adalah

$$I_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [4\alpha + 18, -11\alpha + 3]$$

Dari (3.8), diperoleh

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} - 5 \quad \text{dan} \quad \alpha = \frac{-b_2^{(\alpha)}}{2} + 4$$

sehingga potongan-α untuk bilangan kabur $\tilde{J}$ adalah

$$J_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 5, -2\alpha + 8]$$

Dengan demikian, $I_\alpha : J_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] : [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$

$$= [4\alpha + 18, -11\alpha + 3] : [\alpha + 5, -2\alpha + 8]$$

$$= \left[\frac{4\alpha + 18}{-2\alpha + 8}, \frac{-11\alpha + 33}{\alpha + 5}\right]$$

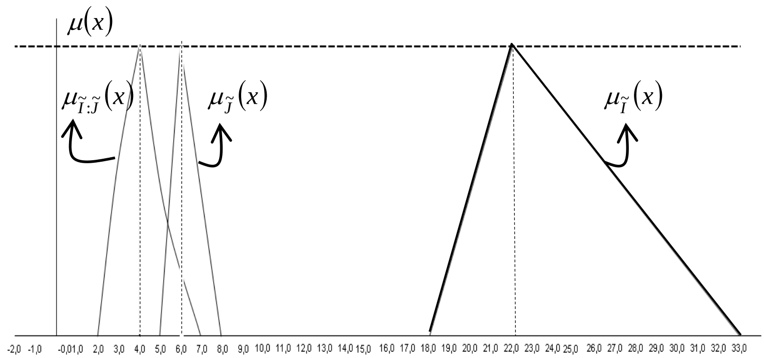
Misalkan $c_1^{(\alpha)} = \dfrac{4\alpha + 18}{-2\alpha + 8}$ dan $c_2^{(\alpha)} = \dfrac{-11\alpha + 33}{\alpha + 5}$, maka

$$\alpha = \frac{8c_1^{(\alpha)} - 18}{4 + 2c_1^{(\alpha)}} \quad \text{dan} \quad \alpha = \frac{33 - 5c_2^{(\alpha)}}{c_2^{(\alpha)} + 11},$$

sehingga diperoleh

$$\mu_{\tilde{I}:\tilde{J}}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq \frac{18}{8} \text{ atau } x \geq \frac{33}{5} \\ \frac{(8x-18)}{(4+2x)} & ; \quad \frac{18}{8} < x < \frac{22}{6} \\ \frac{(33-5x)}{(x+11)} & ; \quad \frac{22}{6} \leq x < \frac{33}{5} \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Gambar 3.5 memperlihatkan grafik fungsi keanggotaan $\tilde{I} : \tilde{J}$



Gambar 3.5 Pembagian dua bilangan kabur (Contoh 3.9)

Contoh 3.10

Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur seperti dalam Contoh 3.8 dan misalkan $\tilde{C} = \tilde{A} : \tilde{B}$, maka $C_\alpha = A_\alpha : B_\alpha$, sehingga diperoleh

$C_{0.1}$ = [3, 5] : [3, 6] = $[\frac{3}{6}, \frac{5}{3}]$ = $\{\frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}\}$

$C_{0.2}$ = [3, 5] : [4, 6] = $[\frac{3}{6}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.3}$ = [3, 5] : [4, 6] = $[\frac{3}{6}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{3}{6}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.4}$ = [3, 5] : [4, 5] = $[\frac{3}{5}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.5}$ = [4, 5] : [4, 5] = $[\frac{4}{5}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.6}$ = [4, 5] : [4, 5] = $[\frac{4}{5}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.7}$ = [4, 5] : [4, 5] = $[\frac{4}{5}, \frac{5}{4}]$ = $\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}\}$

$C_{0.8}$ = [4, 4] : [4, 5] = $[\frac{4}{5}, 1]$ = $\{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, 1\}$

$C_{0.9}$ = [4, 4] : [5, 5] = $[\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$ = $\{\frac{4}{5}\}$

C_1 = [4, 4] : [5, 5] = $[\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$ = $\{\frac{4}{5}\}$

Misalkan didefinisikan himpunan kabur $\tilde{C}_\alpha$ yang fungsi keanggotaannya

$\mu_{\tilde{C}_\alpha}(x) = \alpha\mu_{C_\alpha}(x)$ $\forall x \in \mathbb{N}$, maka diperoleh

$$\tilde{C}_{0.1} = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{3}{6}, 0.1), (\frac{3}{5}, 0.1), (\frac{3}{4}, 0.1), (1, 0.1), (\frac{4}{3}, 0.1), \\ (\frac{4}{5}, 0.1), (\frac{4}{6}, 0.1), (\frac{5}{6}, 0.1), (\frac{5}{4}, 0.1), (\frac{5}{3}, 0.1) \end{array} \right\}$$

$$\tilde{C}_{0.2} = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{3}{6}, 0.2), (\frac{3}{5}, 0.2), (\frac{3}{4}, 0.2), (1, 0.2), (\frac{4}{3}, 0.2), \\ (\frac{4}{5}, 0.2), (\frac{4}{6}, 0.2), (\frac{5}{6}, 0.2), (\frac{5}{4}, 0.2) \end{array} \right\}$$

$$\tilde{C}_{0.3} = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{3}{6}, 0.3), (\frac{3}{5}, 0.3), (\frac{3}{4}, 0.3), (1, 0.3), (\frac{4}{3}, 0.3), \\ (\frac{4}{5}, 0.3), (\frac{4}{6}, 0.3), (\frac{5}{6}, 0.3), (\frac{5}{4}, 0.3) \end{array} \right\}$$

$$\tilde{C}_{0.4} = \left\{ \begin{array}{l} (\frac{3}{5}, 0.4), (\frac{4}{6}, 0.4), (\frac{3}{4}, 0.4), (\frac{4}{5}, 0.4), \\ (\frac{5}{6}, 0.4), (1, 0.4), (\frac{4}{3}, 0.4), (\frac{5}{4}, 0.4) \end{array} \right\}$$

$\tilde{C}_{0.5} = \{(\frac{4}{5}, 0.5), (\frac{5}{6}, 0.5), (1, 0.5), (\frac{4}{3}, 0.5), (\frac{5}{4}, 0.5)\}$

$\tilde{C}_{0.6} = \{(\frac{4}{5}, 0.6), (\frac{5}{6}, 0.6), (1, 0.6), (\frac{4}{3}, 0.6), (\frac{5}{4}, 0.6)\}$

$\tilde{C}_{0.7} = \{(\frac{4}{5}, 0.7), (\frac{5}{6}, 0.7), (1, 0.7), (\frac{4}{3}, 0.7), (\frac{5}{4}, 0.7)\}$

$\tilde{C}_{0.8} = \{(\frac{4}{5}, 0.8), (\frac{5}{6}, 0.8), (1, 0.8)\}$

$\tilde{C}_{0.9} = \{(\frac{4}{5}, 0.9)\}$

$\tilde{C}_1 = \{(\frac{4}{5}, 1)\}$

Dengan menggunakan Teorema Dekomposisi, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \tilde{C}_{0.1} \cup \tilde{C}_{0.2} \cup \tilde{C}_{0.3} \cup \ldots \cup \tilde{C}_1 \\ &= \{(\tfrac{3}{6}, 0.3), (\tfrac{3}{5}, 0.4), (\tfrac{4}{6}, 0.4), (\tfrac{3}{4}, 0.4), (\tfrac{4}{5}, 1), (\tfrac{5}{6}, 0.8), (1, 0.8), \\ &\quad (\tfrac{4}{3}, 0.7), (\tfrac{5}{4}, 0.7), (\tfrac{5}{3}, 0.1)\} \end{aligned}$$

3.3.2 Metode Prinsip Perluasan

Berikut ini akan diberikan teorema yang tidak akan dibuktikan dan akan digunakan untuk mendapatkan operasi aritmetika bilangan kabur.

Teorema 3.1

Jika $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah bilangan kabur pada $\mathbb{R}$ yang fungsi keanggotaannya masing-masing adalah $\mu_{\tilde{I}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{J}}(y)$, maka dengan menggunakan prinsip perluasan pada operasi biner $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diperoleh fungsi keanggotaan bilangan kabur $\tilde{I} * \tilde{J}$ sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{I}*\tilde{J}}(z) = \max_{z=x*y}\{min[\mu_{\tilde{I}}(x),\ \mu_{\tilde{J}}(y)]\}, \tag{3.9}$$

di mana $*$ = {+, −, . , :}.

Dari Teorema 3.1 kita dapat memperoleh fungsi keanggotaan operasi-operasi aritmetika bilangan kabur, sebagai berikut:

Penjumlahan bilangan kabur

Misalkan $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah bilangan kabur pada $\mathbb{R}$ dengan fungsi keanggotaan masing-masing adalah $\mu_{\tilde{I}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{J}}(y)$, maka fungsi keanggotaan bilangan kabur $\tilde{I} + \tilde{J}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{I}+\tilde{J}}(z) = \max_{z=x+y}\{min[\mu_{\tilde{I}}(x),\ \mu_{\tilde{J}}(y)]\} \tag{3.10}$$

Contoh 3.11

Misalkan bilangan kabur $\tilde{1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{1}$ = {(0, 0.2), (1, 1), (2, 0.2)}

maka bilangan kabur $\tilde{1} + \tilde{1}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$\mu_{\tilde{1}+\tilde{1}}(0)$ = *max*[*min*{0.2, 0.2}] = 0.2

$\mu_{\tilde{1}+\tilde{1}}(2)$ = *max*[*min*{0.2, 0.2}, *min*{1, 1}, *min*{0.2, 0.2}] = 1

$\mu_{\tilde{1}+\tilde{1}}(1)$ = *max*[*min*{0.2, 1}, *min*{1, 0.2}] = 0.2

$\mu_{\tilde{1}+\tilde{1}}(3)$ = *max*[*min*{1, 0.2}, *min*{0.2, 1}] = 0.2

$\mu_{\tilde{1}+\tilde{1}}(4)$ = *max*[*min*{0.2, 0.2}] = 0.2

sehingga bilangan kabur

$\tilde{1} + \tilde{1}$ = {(0, 0.2), (1, 0.2), (2, 1), (3, 0.2), (4, 0.2)}

Pengurangan bilangan kabur

Misalkan $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan masing-masing adalah $\mu_{\tilde{I}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{J}}(y)$, maka fungsi keanggotaan bilangan kabur $\tilde{I}$ - $\tilde{J}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{I}\text{-}\tilde{J}}(z) = \max_{z=x-y}\{min[\mu_{\tilde{I}}(x),\ \mu_{\tilde{J}}(y)]\} \qquad (3.11)$$

Contoh 3.12

Misalkan bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{1}$ masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{3}$ = {(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3)}

$\tilde{1}$ = {(0, 0.2), (1, 1), (2, 0.2)}

maka bilangan kabur $\tilde{3}$ - $\tilde{1}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(1)$ = *max*[*min*{0.1, 0.2), *min*{0.5, 1}, *min*{1, 0.2}] = 0.5

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(0)$ = *max*[*min*{0.1, 1), *min*{0.5, 0.2}= 0.2

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(2)$ = *max*[*min*{0.5, 0.2), *min*{1, 1}, *min*{0.7, 0.2}] = 1

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(3)$ = *max*[*min*{1, 0.2), *min*{0.7, 1}, *min*{0.3, 0.2}] = 0.7

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(-1)$ = *max*[*min*{0.1, 0.2}] = 0.1

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(4)$ = *max*[*min*{0.7, 0.2), *min*{0.3, 1}] = 0.3

$\mu_{\tilde{3}\text{-}\tilde{1}}(5)$ = *max*[*min*{0.3, 0.2}] = 0.2

sehingga bilangan kabur

$\tilde{3}$ – $\tilde{1}$ = {(-1, 0.1), (0, 0.2), (1, 0.5), (2, 1), (3, 0.7), (4, 0.3), (5, 0.2)}

Perkalian Bilangan Kabur

Misalkan $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah bilangan kabur pada $\mathbb{R}$ dengan fungsi keanggotaan masing-masing adalah $\mu_{\tilde{I}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{J}}(y)$, maka fungsi keanggotaan bilangan kabur $\tilde{I}\,.\,\tilde{J}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{I}.\tilde{J}}(z) = \max_{z=x.y}\{min[\mu_{\tilde{I}}(x),\ \mu_{\tilde{J}}(y)]\} \quad (3.12)$$

Contoh 3.13

Misalkan bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{2}$ masing-masing didefinisikan, sebagai berikut:

$\tilde{3}$ = {(1, 0.1), (2, 0.5), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3)}

$\tilde{2}$ = {(1, 0.2), (2, 1), (3, 0.5)}

maka bilangan kabur $\tilde{3}\cdot\tilde{2}$ dapat diperoleh sebagai berikut:

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(1)$ = *max*[*min*{0.1, 0.2}] = 0.1

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(2)$ = *max*[*min*{0.1, 1}, *min*{0.5, 0.2}] = 0.2

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(3)$ = *max*[*min*{0.1, 0.5}, *min*{1, 0.2}] = 0.2

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(4)$ = *max*[*min*{0.5, 1}, *min*{0.7, 0.2}] = 0.5

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(5)$ = *max*[*min*{0.3, 0.2}] = 0.2

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(6)$ = *max*[*min*{0.5, 0.5}, *min*{1, 1}] = 1

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(8)$ = *max*[*min*{0.7, 1}] = 0.7

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(9)$ = *max*[*min*{1, 0.5}] = 0.5

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(10)$ = *max*[*min*{0.3, 1}] = 0.3

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(12)$ = *max*[*min*{0.7, 0.5}] = 0.5

$\mu_{\tilde{3}.\tilde{2}}(15)$ = *max*[*min*{0.3, 0.5}] = 0.3

Sehingga diperoleh:

$\tilde{3}\cdot\tilde{2}$ = {(1, 0.1), (2, 0.2), (3, 0.2), (4, 0.5), (5, 0.2), (6, 1), (8, 0.7),
(9, 0.5), (10, 0.3), (12, 0.5), (15, 0.3)}

Dari hasil perkalian bilangan kabur tersebut, ternyata hasilnya tidak konveks. Ketidakkonveksan ini disebabkan oleh penyimpangan yang berkaitan dengan angka dari pendiskritan (*descretization*) bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{2}$, bukan disebabkan oleh masalah dalam prinsip perluasan. Permasalahan ini dapat diatasi dengan mentransformasikan bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{2}$ dalam $\mathbb{N}$

menjadi bilangan kabur dalam $\mathbb{R}$, atau dengan kata lain pendiskritannya dinaikkan sehingga fungsi keanggotaan hasil perkaliannya akan monoton naik di sebelah kiri nilai normal (μ = 1) dan monoton turun di sebelah kanan nilai normal.

Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

- Pada bilangan yang lebih kecil daripada bilangan yang fungsi keanggotaannya sama dengan satu, gunakan semua pasangan perkalian $x.y$ di mana $x.y \le z$.
- Pada bilangan yang lebih besar daripada bilangan yang fungsi keanggotaannya sama dengan satu, gunakan semua pasangan perkalian $x.y$ di mana $x.y \ge z$.

Dengan demikian, dari Contoh 3.13 perkalian bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{2}$ dapat diperoleh melalui proses berikut:

Bilangan yang fungsi keanggotaannya sama dengan satu adalah 6, yaitu:

$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(6)$ = $max[min(0.5, 0.5), min(1, 1)] = 1$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(1) = max\left[min\overbrace{(0.1,\ 0.2)}^{1\times 1} \right] = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(2) = max\left[min\overbrace{(0.1,\ 0.2)}^{1\times 1},\ min\overbrace{(0.5,\ 0.2)}^{2\times 1},\ min\overbrace{(0.1,\ 1)}^{1\times 2} \right] = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(3) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(0.1, 0.2)}^{1\times 1}, min\overbrace{(0.1,\ 1)}^{1\times 2},\ min\overbrace{(0.5,\ 0.2)}^{2\times 1}, \\ min\overbrace{(0.1,\ 0.5)}^{1\times 3},\ min\overbrace{(1, 0.2)}^{3\times 1} \end{array} \right] = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(4) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(0.1,\ 0.2)}^{1\times 1},\ min\overbrace{(0.1,\ 1)}^{1\times 2},\ min\overbrace{(0.5,\ 0.2)}^{2\times 1}, \\ min\overbrace{(1,\ 0.2)}^{3\times 1},\ min\overbrace{(0.1,\ 0.5)}^{1\times 3},\ min\overbrace{(0.5,\ 1)}^{2\times 2}, \\ min\overbrace{(0.7,\ 0.2)}^{4\times 1} \end{array}\right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(5) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(0.1,\ 0.2)}^{1\times 1},\ min\overbrace{(0.1,\ 1)}^{1\times 2},\ min\overbrace{(0.5,\ 0.2)}^{2\times 1}, \\ min\overbrace{(1,\ 0.2)}^{1\times 3}, min\overbrace{(0.1,\ 0.5)}^{1\times 3},\ min\overbrace{(0.5,\ 1)}^{2\times 2}, \\ min\overbrace{(0.7,\ 0.2)}^{4\times 1},\ min\overbrace{(0.3,\ 0.2)}^{5\times 1} \end{array}\right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(6) = 1$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(7) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(0.7,\ 1)}^{4\times 2},\ min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times 3},\ min\overbrace{(1,\ 0.5)}^{3\times 3}, \\ min\overbrace{(0.3,\ 1)}^{5\times 2}, min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times 3} \end{array}\right] = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(8) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(0.7,\ 1)}^{4\times 2},\ min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times 3},\ min\overbrace{(1,\ 0.5)}^{3\times 3}, \\ min\overbrace{(0.3,\ 1)}^{5\times 2},\ min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times 3} \end{array}\right] = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(9) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{(1,\ 0.5)}^{3\times 3},\ min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times 3},\ min\overbrace{(0.3,\ 1)}^{5\times 2}, \\ min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times 3} \end{array}\right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(10) = max\left[\ min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times 3},\ min\overbrace{(0.3,\ 1)}^{5\times 2},\ min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times 3}\ \right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(11) = max\left[min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times3},\ min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times3} \right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(12) = max\left[min\overbrace{(0.7,\ 0.5)}^{4\times3},\ min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times3} \right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(13) = max\left[min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times3} \right] = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(14) = max\left[min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times3} \right] = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{2}.\tilde{3}}(14) = max\left[min\overbrace{(0.3,\ 0.5)}^{5\times3} \right] = 0.3$$

sehingga :

$$\tilde{3}\cdot\tilde{2} = \left\{ \begin{matrix} (1,\ 0.1),\ (2,\ 0.2),\ (3,\ 0.2),\ (4,\ 0.5),\ (5,\ 0.5),\ (6,\ 1), \\ (7, 0.7),\ (8, 0.7),\ (9,\ 0.5), (10, 0.5), (11,\ 0.5), (12, 0.5), \\ (13,\ 0.3), (14,\ 0.3),\ (15,\ 0.3) \end{matrix} \right\}$$

<u>Pembagian bilangan kabur</u>

Misalkan $\tilde{I}$ dan $\tilde{J}$ adalah bilangan kabur pada $\mathbb{R}$ dengan fungsi keanggotaan masing-masing adalah $\mu_{\tilde{I}}(x)$ dan $\mu_{\tilde{J}}(y)$, maka fungsi keanggotaan bilangan kabur $\tilde{I}:\tilde{J}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{I}:\tilde{J}}(z) = \max_{z=x:y}\{min[\mu_{\tilde{I}}(x),\ \mu_{\tilde{J}}(y)]\} \qquad (3.13)$$

Contoh 3.14

Pandang kembali bilangan kabur $\tilde{3}$ dan $\tilde{2}$ pada Contoh 3.13. Dengan menaikkan pendiskritan seperti pada Contoh 3.13 maka bilangan kabur $\tilde{3}:\tilde{2}$ dapat diperoleh melalui proses berikut:

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{1}{3}\right) = max\left[min\overbrace{\left(0.1, \quad 0.5\right)}^{1/3} \right] = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right) = max\left[min\overbrace{\left(0.1, 0.5\right)}^{1/3}, min\overbrace{\left(0.1, 1\right)}^{1/2} \right] = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{2}{3}\right) = max\left[min\overbrace{\left(0.1, 0.5\right)}^{1/3}, min\overbrace{\left(0.1, 1\right)}^{1/2}, min\overbrace{\left(0.5, 0.5\right)}^{2/3} \right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(1) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{\left(0.1, 0.5\right)}^{1/3}, min\overbrace{\left(0.1, 1\right)}^{1/2}, min\overbrace{\left(0.5, 0.5\right)}^{2/3}, \\ min\overbrace{\left(0.1, 0.2\right)}^{1/1}, min\overbrace{\left(0.5, 1\right)}^{2/2}, min\overbrace{\left(1, \quad 0.5\right)}^{3/3} \end{array} \right] = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{3}{2}\right) = 1$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{4}{3}\right) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{\left(0.7, 0.5\right)}^{4/3}, min\overbrace{\left(0.3, 0.5\right)}^{5/3}, min\overbrace{\left(0.5, 0.2\right)}^{2/1}, \\ min\overbrace{\left(0.7, 1\right)}^{4/2}, min\overbrace{\left(0.3, 1\right)}^{5/2}, min\overbrace{\left(1, 0.2\right)}^{3/1}, \\ min\overbrace{\left(0.7, 0.2\right)}^{4/1}, min\overbrace{\left(0.3, 0.2\right)}^{5/1} \end{array} \right] = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}\left(\tfrac{5}{3}\right) = max\left[\begin{array}{l} min\overbrace{\left(0.3, 0.5\right)}^{5/3}, min\overbrace{\left(0.5, 0.2\right)}^{2/1}, min\overbrace{\left(0.7, 1\right)}^{4/2}, \\ min\overbrace{\left(0.3, 1\right)}^{5/2}, min\overbrace{\left(1, 0.2\right)}^{3/1}, min\overbrace{\left(0.7, 0.2\right)}^{4/1}, \\ min\overbrace{\left(0.3, 0.2\right)}^{5/1} \end{array} \right] = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(2) = max\begin{bmatrix} min\overbrace{\left(0.5,\ 0.2\right)}^{2/1},\ min\overbrace{\left(0.7,\ 1\right)}^{4/2},\ min\overbrace{\left(0.3,\ 1\right)}^{5/2}, \\ min\overbrace{\left(1,\ 0.2\right)}^{3/1},\ min\overbrace{\left(0.7,\ 0.2\right)}^{4/1},\ min\overbrace{\left(0.3,\ 0.2\right)}^{5/1} \end{bmatrix} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(\tfrac{5}{2}) = max\begin{bmatrix} min\overbrace{\left(0.3,\ 1\right)}^{5/2},\ min\overbrace{\left(1,\ 0.2\right)}^{3/1},\ min\overbrace{\left(0.7,\ 0.2\right)}^{4/1}, \\ min\overbrace{\left(0.3,\ 0.2\right)}^{5/1} \end{bmatrix} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(3) = max\begin{bmatrix} min\overbrace{\left(1,\ 0.2\right)}^{3/1},\ min\overbrace{\left(0.7,\ 0.2\right)}^{4/1},\ min\overbrace{\left(0.3,\ 0.2\right)}^{5/1} \end{bmatrix}$$

$$= 0.2$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(4) = max\begin{bmatrix} min\overbrace{\left(0.7,\ 0.2\right)}^{4/1},\ min\overbrace{\left(0.3,\ 0.2\right)}^{5/1} \end{bmatrix} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{3}:\tilde{2}}(5) = max\left[min\left(0.3,\ 0.2\right)\right] = 0.2$$

sehingga diperoleh:

$$\tilde{3} : \tilde{2} = \begin{Bmatrix} (\tfrac{1}{3},\ 0.1),\ (\tfrac{1}{2},\ 0.1),\ (\tfrac{2}{3},\ 0.5),\ (1,\ 0.5),\ (\tfrac{3}{2},\ 1),\ (\tfrac{4}{3},\ 0.7), \\ (\tfrac{5}{3},\ 0.7), (2,\ 0.7),\ (\tfrac{5}{2},\ 0.3),\ (3,\ 0.2), (4, 0.2),\ (5,\ 0.2) \end{Bmatrix}$$

Soal-Soal Latihan

3.1. Yang manakah dari himpunan kabur yang fungsi keanggotaannya didefinisikan berikut termasuk bilangan kabur:

i). $$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \sin x & ;\ 0 \le x \le \pi \\ 0 & ;\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

ii). $$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x & ;\ 0 \le x \le 10 \\ 0 & ;\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

iii). $$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 0 \le x \le 10 \\ 0 & ;\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

iv). $$\mu_{\tilde{D}}(x) = \begin{cases} \min(1, x) & ;\ x \ge 0 \\ 0 & ;\ x < 0 \end{cases}$$

v). $$\mu_{\tilde{E}}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ x = 5 \\ 0 & ;\ x \text{ yang lain} \end{cases}$$

3.2. Hitunglah
a) [-1, 2] + [1, 3]
b) [-2, 4] - [3, 6]
c) [-3, 4] · [-3, 4]
d) [-4, 6] : [1, 2]

3.3. Misalkan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)}{2} & ;\ -2 < x \le 0 \\ \dfrac{(2-x)}{2} & ;\ 0 < x < 2 \\ 0 & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)}{2} & ;\ 2 < x \le 4 \\ \dfrac{(6-x)}{2} & ;\ 4 < x \le 6 \\ 0 & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Hitunglah $\tilde{A}+\tilde{B}$, $\tilde{A}-\tilde{B}$, $\tilde{A}\cdot\tilde{B}$ dan $\tilde{A}:\tilde{B}$ dengan menggunakan metode potongan-α.

3.4. (a). Misalkan bilangan kabur "sekitar 4" dan "sekitar 3" dalam $\mathbb{N}$ didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{4} =$ {(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)}

$\tilde{3} =$ {(1, 0.3), (2, 0.6), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.2), (6, 0.1)}

Hitunglah $\tilde{4}+\tilde{3}$ dengan menggunakan metode potongan-α dan prinsip perluasan.

(b). Misalkan bilangan kabur "sekitar 2" dan "sekitar 1" dalam $\mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{2} =$ {(-2, 0.1), (-1, 0.3), (0, 0.7), (1, 0.9), (2, 1), (3, 0.5)}

$\tilde{1} =$ {(-1, 0.1), (0, 0.6), (1, 1), (2, 0.8), (3, 0.3)}

Hitunglah $\tilde{2} - \tilde{1}$ dengan menggunakan metode potongan-α dan prinsip perluasan.

(c). Misalkan bilangan kabur "sekitar 4" dan "sekitar 5" dalam $\mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{4} =$ {(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)}

$\tilde{5} =$ {(1, 0.3), (2, 0.6), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.2), (6, 0.1)}

Hitunglah $\tilde{4}\cdot\tilde{5}$ dan $\tilde{4}:\tilde{5}$ dengan menggunakan metode potongan-α dan prinsip perluasan.

3.5. Buktikan bahwa jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah bilangan kabur dalam $\mathbb{R}$, maka $\tilde{A}+\tilde{B}$ dan $\tilde{A}\cdot\tilde{B}$ adalah himpunan kabur dalam $\mathbb{R}$ yang normal. (gunakan metode potongan-α)